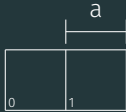


KV-Diagramme

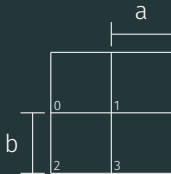
- Benannt nach Maurice Karnaugh und Edward W. Veitch
 - Englisch: Karnaugh map
- Ziel: Optimierung logischer Funktionen und damit digitaler Schaltungen
- Graphisches Verfahren
 - Diagrammgröße wächst exponentiell mit der Zahl der Variablen
 - Nicht geeignet zur Optimierung von Funktionen mit vielen Variablen

Beispiele

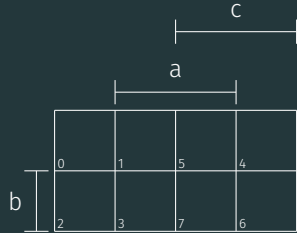
- Eine Variable:



- Zwei Variablen:



- Drei Variablen:

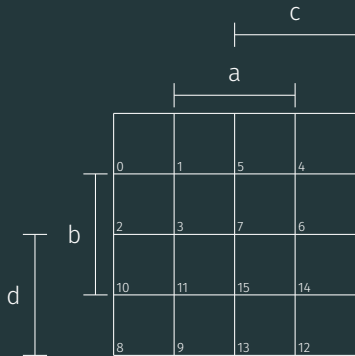


- Zum Hinzufügen einer weiteren Variable wird das KV-Diagramm abwechselnd horizontal oder vertikal gespiegelt

Aufgabe 1

- Zeichne ein KV-Diagramm für vier Variablen

Aufgabe 1: Lösung



Funktionsdarstellung im KV-Diagramm

- Unsere bisherigen Diagramme waren nur leere “Schablonen”
 - Zur Darstellung einer bestimmten Funktion muss diese “Schablone” gefüllt werden
- Die Linien am Rand signalisieren die Bereiche, in denen die jeweilige Eingangsvariable den Wert 1 annimmt
 - Jede einzelne Zelle entspricht dann genau einer Belegung der vorhandenen Eingangsvariablen
 - In die Zelle wird der Wert geschrieben, den die Funktion bei dieser Eingangsbelegung annimmt

Beispiel: Von der Funktion zum KV-Diagramm

- Wir betrachten die Funktion $f(b, a) = a \text{ XOR } b$
- Zugehöriges KV-Diagramm:

		a	
		0	1
b	0	0	1
	1	1	0
		2	3

Aufgabe 2

Gegeben ist die Wahrheitstabelle einer aussagenlogischen Funktion $f(c, b, a)$:

c	b	a	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Erstelle ein KV-Diagramm für f
- Gib die KDNF der Funktion an

Aufgabe 2: Lösung

$f(c, b, a)$

	c			
	a			
b	0	1	1	0
	2	3	7	6

KDNF:

$$f(c, b, a) = \bar{c}\bar{b}a \vee \bar{c}ba \vee c\bar{b}a \vee cba$$

KV-Diagramm aus Wahrheitstabelle

Wenn die Spalten mit den “Eingangsvariablen” so sortiert sind wie in den Beispielen auf den vorangehenden Folien¹, dann liefert die Belegung der “Eingangsvariablen” als Binärzahl gelesen die Nummer des entsprechenden Felds im KV-Diagramm.

Beispiel:

d	c	b	a	f
1	1	0	0	X

Der Funktionswert X wird in Feld 12 ($=1100_2$) eingetragen.

¹Reihenfolge der Eingangsspalten in der Wahrheitstabelle umgekehrt wie Erweiterungsreihenfolge des KV-Diagramms

Optimieren von Funktionen (1)

Rückblick: KV-Diagramm und KDNF aus Aufgabe 2:

$f(c, b, a)$

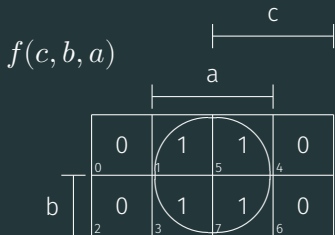
	c			
	a			
b	0	1	1	0
	2	3	7	6

KDNF:

$$f(c, b, a) = \bar{c}\bar{b}a \vee \bar{c}ba \vee c\bar{b}a \vee cba$$

- Lässt sich die Belegung des KV-Diagramms mit einem einfacheren Funktionsterm beschreiben?

Optimieren von Funktionen (2)



- Die markierten Einsen decken genau den Bereich der Variablen a ab (siehe Linie oben)
- Die dargestellte Funktion kann also beschrieben werden durch:

$$\cdot f(c, b, a) = a$$

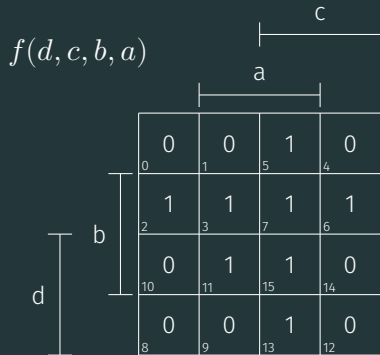
Allgemeines Vorgehen zum Optimieren einer Funktion f :

1. Erstelle das KV-Diagramm für f
2. Suche nach möglichst großen zusammenhängenden Eins-Blöcken der Größe 2^k , $k \in \mathbb{N}$, bis alle Einsen von f überdeckt sind (ggf. auch mehrfach)
3. Beschreibe jeden Eins-Block durch einen Konjunktionsterm
4. Verknüpfe die Konjunktionsterme disjunktiv

Beachte: Es sind auch randübergreifende Blöcke möglich (bspw. \bar{a})

Aufgabe 3

- Gib einen Funktionsterm für folgendes KV-Diagramm an:



$$f(d, c, b, a) = ba \vee \bar{d}b \vee ca$$

Aufgabe 4

- Erstelle ein KV-Diagramm für c_{out} des Volladdierers
- Ermittle aus dem KV-Diagramm einen möglichst einfachen Funktionsterm für c_{out}